

2^e école d'été de mécanique théorique « Milieux Continus Généralisés »

Dérivation de milieu de Cosserat par homogénéisation

Patrick BALLARD

2 juin 2013

L'objectif de cet exercice est, d'une part, de faire valoir que la théorie des poutres est une théorie de milieu de Cosserat, et, d'autre part, de montrer qu'un milieu de Cosserat peut apparaître spontanément par homogénéisation d'un treillis de barres articulées.

1 Milieu de Cosserat curviligne en transformation infinitésimale plane

Soit un milieu de Cosserat curviligne en transformation plane, c'est-à-dire que ses configurations successives sont des courbes régulières d'un même plan fixé. Considérant une configuration particulière où chaque point matériel est repéré par son abscisse curviligne s , la vitesse de transformation est la donnée :

- de la vitesse de déplacement $\mathbf{v}(s)$ de chacun des points du milieu curviligne dans le plan,
- de la vitesse de rotation $\omega(s)$ autour de la direction orthogonale au plan, de la microstructure attachée à chacun des points.

Le plan étant rapporté à un repérage cartésien orthonormé Oxy , on considère maintenant un milieu de Cosserat curviligne dont la configuration est le segment $[0, L]$ de l'axe Ox . La puissance virtuelle des efforts intérieurs fait intervenir :

- le cofacteur R_x de la vitesse de dilatation locale dv_x/dx ,
- le cofacteur R_y de la vitesse de rotation relative $dv_y/dx - \omega$,
- le cofacteur M_z du gradient de la vitesse de rotation de la microstructure $d\omega/dx$.

1) *Écrire les équations de l'équilibre lorsque les efforts extérieurs linéiques sont identiquement nuls et expliquer quelles sont les informations physiques portées par les 3 champs $R_x(x)$, $R_y(x)$ et $M_z(x)$.*

Choissant cette configuration rectiligne comme configuration de référence, une configuration quelconque sera repérée par la donnée :

- du déplacement $\mathbf{u}(x)$ ($x \in [0, L]$) de chacun des points du milieu curviligne dans le plan Oxy ,
- de la rotation $\theta(x)$ ($x \in [0, L]$) autour de la direction orthogonale au plan Oxy , de la microstructure attachée à chacun des points.

L'hypothèse de la transformation infinitésimale est la restriction de l'étude à la circonstance :

$$\left\| \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right\| \ll 1, \quad |\theta| \ll 1,$$

(où l'on notera que toutes les quantités en jeu sont bien adimensionnelles) permettant la *linéarisation* systématique de toutes les équations par rapport au couple $(\underline{\mathbf{u}}', \theta)$.

Les mesures de déformation linéarisées sont fournies par :

- la dilatation locale du_x/dx ,
- la rotation relative $du_y/dx - \theta$,
- le gradient de la rotation de la microstructure $d\theta/dx$,

et la loi de comportement élastique :

$$R_x = K_e \frac{du_x}{dx}, \quad R_y = K_c \left(\frac{du_y}{dx} - \theta \right), \quad M_z = K_f \frac{d\theta}{dx},$$

fait donc intervenir les 3 modules d'élasticité :

- K_e , la raideur en extension,
- K_c , la raideur en cisaillement,
- K_f , la raideur en flexion.

Pour fixer les idées, on considère maintenant l'équilibre d'un tel milieu de Cosserat rectiligne élastique en transformation infinitésimale plane. L'extrémité amont est encastree, l'extrémité aval est soumise à des efforts se réduisant à une force tranchante d'amplitude F comptée positivement vers les y décroissants et le milieu est libre d'efforts linéiques.

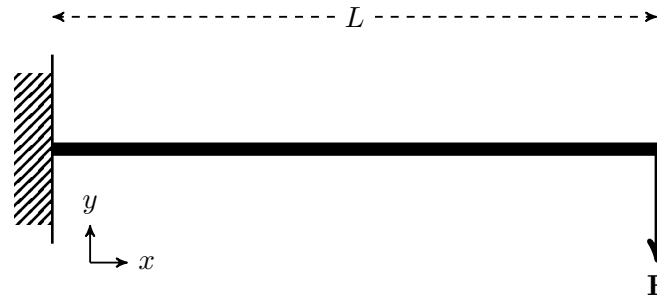


FIGURE 1 – Géométrie du problème d'équilibre.

2) Calculer le champ de déplacement $(\underline{\mathbf{u}}(x), \theta(x))$ à l'équilibre.

3) On suppose maintenant que le milieu de Cosserat obéit à la liaison interne qui stipule que la rotation relative $du_y/dx - \theta$ y est toujours identiquement nulle. Calculer le déplacement d'équilibre dans ce cas. Comparer le résultat avec la limite $K_c \rightarrow +\infty$ du résultat de la question précédente.

Terminologie. Un milieu de Cosserat curviligne est appelé *poutre de Timoshenko*. Un milieu de Cosserat curviligne obéissant à la liaison interne qui stipule que la rotation relative est nulle est appelé *poutre d'Euler-Bernoulli* ou bien de Navier-Bernoulli. Le champ R_x est appelé *effort normal*, R_y , *effort tranchant*, M_z , *moment interne*. Le problème d'équilibre considéré est celui d'une *poutre console*.

2 Homogénéisation d'un treillis de barres articulées

On considère l'équilibre du treillis de $4n$ barres (ressorts) parfaitement articulées dont la géométrie est représentée sur la figure 2 et le chargement se réduit à la force extérieure $-F \mathbf{e}_y$ imposée à l'articulation A_n .

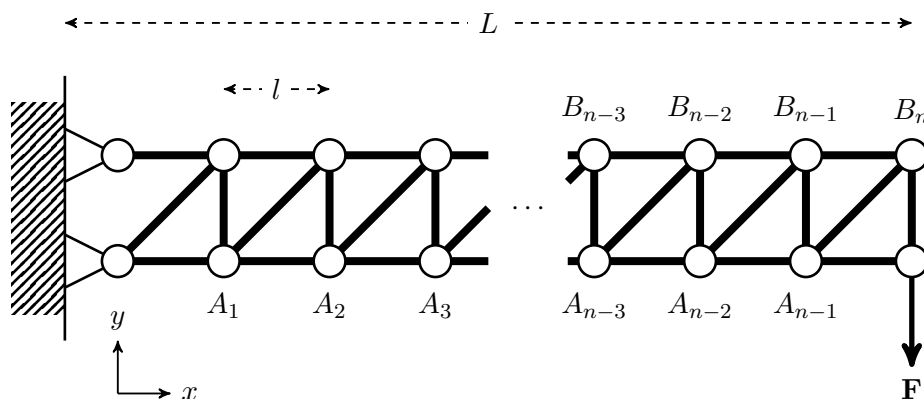


FIGURE 2 – Équilibre d'un treillis élancé de barres.

4) Calculer les répartitions de tensions dans toutes les barres du treillis et constater que celles-ci sont complètement déterminées¹ par la donnée de F .

On souhaite maintenant étudier la déformée du treillis pour en faire l'analyse asymptotique lorsque $l \rightarrow 0+$ à L fixé. Cela nécessite la connaissance de la loi de comportement de chacune des barres. On décide de se limiter au cadre de la transformation infinitésimale et le comportement de chaque barre est alors caractérisé par une seule raideur scalaire. On suppose les barres « inférieures » $A_{i-1}A_i$ et les barres « verticales » A_iB_i inextensibles (c'est-à-dire, de raideur infinie), les barres « supérieures » $B_{i-1}B_i$, toutes de même raideur k_h et les barres « diagonales » $A_{i-1}B_i$ toutes de même raideur k_d .

5) Calculer le déplacement de chaque articulation. Quels sont les termes dominants lorsque $l \rightarrow 0+$ à L fixé. Constater que le treillis se comporte asymptotiquement comme une poutre d'Euler-Bernoulli (milieu de Cosserat curviligne obéissant à la liaison interne qui stipule que la rotation relative est toujours nulle). Quelle est sa raideur en flexion ?

6) Retrouver le résultat précédent en écrivant l'équilibre du treillis sous la forme du problème de minimisation de l'énergie potentielle totale sur les déplacements cinématiquement admissibles. Analyser alors le comportement asymptotique de ce problème de minimisation (approche par Γ -convergence).

1. ce n'est pas toujours le cas. Lorsque c'est le cas, comme dans l'exemple étudié, on dit que le problème d'équilibre est *isostatique*.

Corrigé

1) Puisque la densité linéique d'efforts extérieurs est nulle, la puissance des efforts extérieurs est nulle. La puissance des efforts de contact aux extrémités s'écrit :

$$\mathcal{P}^{(c)} = \underline{\mathbf{F}}_L \cdot \hat{\mathbf{v}}(L) + C_L \hat{\omega}(L) + \underline{\mathbf{F}}_0 \cdot \hat{\mathbf{v}}(0) + C_0 \hat{\omega}(0),$$

où $\underline{\mathbf{F}}_L$ (resp. $\underline{\mathbf{F}}_0$) est la force exercée en l'extrémité aval (resp. amont), C_L (resp. C_0) le moment exercé en l'extrémité aval (resp. amont), par rapport à la position de cette extrémité.

La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}^{(i)} = - \int_0^L \left(R_x \frac{d\hat{v}_x}{dx} + R_y \left(\frac{d\hat{v}_y}{dx} - \hat{\omega} \right) + M_z \frac{d\hat{\omega}}{dx} \right) dx,$$

et l'équation de l'équilibre s'écrit :

$$\forall(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\omega}), \quad \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(c)} = 0,$$

soit, après intégration par parties :

$$\forall(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\omega}), \quad \int_0^L \left(\frac{dR_x}{dx} \hat{v}_x + \frac{dR_y}{dx} \hat{v}_y + \left(\frac{dM_z}{dx} + R_y \right) \hat{\omega} \right) dx + \left(\underline{\mathbf{F}}_L - \underline{\mathbf{R}}(L) \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}(L) + \left(\underline{\mathbf{F}}_0 + \underline{\mathbf{R}}(0) \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}(0) + \left(C_L - M_z(L) \right) \hat{\omega}(L) + \left(C_0 + M_z(0) \right) \hat{\omega}(0) = 0.$$

On en déduit les équations de l'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} &= \frac{dR_y}{dx} = 0, \\ \frac{dM_z}{dx} + R_y &= 0, \end{aligned}$$

ainsi que la signification des trois champs de « contrainte » R_x , R_y et M_z :

- $\underline{\mathbf{R}}(x)$ est la force exercée par la partie du milieu en aval de x sur la partie du milieu qui est en amont de x ,
- $M_z(x)$ est le moment (évalué en ce point) des efforts exercés par la partie du milieu en aval de x sur la partie du milieu qui est en amont de x .

2) Puisque :

$$R_x(L) = 0, \quad R_y(L) = -F, \quad M_z(L) = 0,$$

les équations d'équilibre seules déterminent la répartition de « contrainte » :

$$R_x \equiv 0, \quad R_y \equiv -F, \quad M_z(x) = F(x - L).$$

Les conditions d'encastrement :

$$u_x(0) = u_y(0) = 0 = \theta(0),$$

associée à la loi de comportement élastique donnent alors le déplacement à l'équilibre :

$$\begin{aligned}u_x(x) &= 0, \\u_y(x) &= \frac{F}{6K_f}x^2(x - 3L) - \frac{F}{K_c}x, \\ \theta(x) &= \frac{F}{2K_f}x(x - 2L).\end{aligned}$$

Remarquons que la rotation relative étant constante et non nulle, elle est aussi non nulle à l'extrémité encastrée avec comme conséquence que la tangente à la déformée à l'extrémité encastrée n'est pas dirigée suivant la configuration initiale.

3) La répartition de « contrainte » à l'équilibre est inchangée. La loi de comportement est maintenant :

$$R_x = K_e \frac{du_x}{dx}, \quad \frac{du_y}{dx} - \theta = 0, \quad M_z = K_f \frac{d\theta}{dx},$$

et, puisque R_y est non nul, correspond à une idéalisation $K_c = \infty$ dans la situation précédente. Les expressions de u_x et θ sont inchangées par rapport à la situation précédente et u_y s'obtient maintenant par la liaison interne :

$$\begin{aligned}u_x(x) &= 0, \\u_y(x) &= \frac{F}{6K_f}x^2(x - 3L), \\ \theta(x) &= \frac{F}{2K_f}x(x - 2L).\end{aligned}$$

Sans surprise, il s'agit de la limite $K_c \rightarrow +\infty$, du champ de déplacement obtenu à la question précédente. À la différence d'une poutre de Timoshenko, une poutre d'Euler-Bernoulli encastrée a toujours une direction invariable au point d'encastrement.

4) En coupant par la pensée la barre $B_{i-1}B_i$ et en écrivant la nullité du moment en A_{i-1} de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur la partie du treillis en aval de A_{i-1} , il vient :

$$B_{i-1}B_i \quad : \quad N = (n + 1 - i)F.$$

De même, en coupant par la pensée la barre $A_{i-1}A_i$ et en écrivant la nullité du moment en B_i de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur la partie du treillis en aval de B_i . Il vient :

$$A_{i-1}A_i \quad : \quad N = -(n - i)F.$$

L'équilibre, au choix de la rotule A_{i-1} ou B_i permet alors d'achever le calcul par l'identification des tensions dans les autres barres :

$$\begin{aligned}A_{i-1}B_i \quad : \quad N &= -F\sqrt{2}, \\ A_iB_i \quad : \quad N &= F.\end{aligned}$$

Réciproquement, cette répartition de tension est bien compatible avec l'équilibre de chaque rotule : le problème considéré est isostatique.

5) La composante « horizontale » du déplacement (linéarisé par rapport et à la déformation et à la rotation) de chacune des rotules se déduit facilement de la connaissance des tensions dans les barres horizontales. Ainsi, la composante « horizontale » du déplacement de la rotule A_i est nulle :

$$u_x(A_i) = 0,$$

et celle de la rotule B_i vaut :

$$u_x(B_i) = \frac{Fl}{k_h} \sum_{k=1}^i (n+1-k) = i(2n-i+1) \frac{Fl}{2k_h}.$$

Les barres « verticales » étant inextensibles, la rotule B_n a même composante verticale que la rotule A_n . Pour les évaluer, on commence par évaluer l'énergie complémentaire du système :

$$E_c(F) = \frac{lF^2}{2k_h} \sum_{k=1}^n (n+1-k)^2 + \frac{nlF^2\sqrt{2}}{k_d} = \frac{lF^2}{12k_h} n(n+1)(2n+1) + \frac{nlF^2\sqrt{2}}{k_d},$$

(où l'on a fait usage de l'identité $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$), puis en utilisant le théorème de Castigliano-Menabrea :

$$u_y(B_n) = u_y(A_n) = -\frac{d}{dF} E_c(F) = -\frac{lF}{6k_h} n(n+1)(2n+1) - \frac{nlF2\sqrt{2}}{k_d}.$$

Pour évaluer la composante « verticale » du déplacement de la rotule A_i , on applique la charge fictive F_i , (comptée positivement vers le base de la figure) et destinée à devenir évanescence. La répartition des tensions dans les barres est alors inchangée dans les barres en aval de A_i et est donnée dans les barres en amont par :

$$\begin{aligned} B_{k-1}B_k & : & N &= (n+1-k)F + (i+1-k)F_i, \\ A_{k-1}A_k & : & N &= -(n-k)F - (i-k)F_i, \\ A_{k-1}B_k & : & N &= -(F+F_i)\sqrt{2}, \\ A_kB_k & : & N &= F+F_i. \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, \dots, i$. Le théorème de Castigliano-Menabrea donne alors :

$$\begin{aligned} u_y(B_i) = u_y(A_i) &= -\frac{\partial E_c}{\partial F_i}(F, F_i = 0) = -\frac{lF}{k_h} \sum_{k=1}^i (n+1-k)(i+1-k) - \frac{ilF2\sqrt{2}}{k_d}, \\ &= -\frac{lF}{6k_h} i(i+1)(3n-i+1) - \frac{ilF2\sqrt{2}}{k_d}. \end{aligned}$$

Posant $x_i = il$, on peut utiliser les déplacements des rotules A_i pour interpoler un champ de déplacement. Il vient :

$$\begin{aligned} u_x(x_i) &= 0, \\ u_y(x_i) &= -\frac{F}{6k_h l^2} x_i(x_i+l)(3L-x_i+l) - \frac{2\sqrt{2}F}{k_d} x_i. \end{aligned}$$

Lorsque l tend vers $0+$ à L fixé, tous les termes deviennent négligeables devant ceux en $F/k_h l^2$ et le déplacement se comporte asymptotiquement comme :

$$\begin{aligned} u_x(x) &= 0, \\ u_y(x) &= \frac{F}{6k_h l^2} x^2 (x - 3L), \end{aligned}$$

qui est le champ de déplacement dans une poutre console d'Euler-Bernoulli de raideur en flexion $k_h l^2$. On peut d'ailleurs évaluer la rotation des barres $A_i B_i$ dont l'angle est donné par $-u_x(B_i)/l$:

$$\theta(x_i) = \frac{F}{2k_h l^2} x_i (x_i - l - 2L) \simeq \frac{F}{2k_h l^2} x_i (x_i - 2L),$$

qui montre que les barres verticales portent la microstructure du milieu de Cosserat constituant la limite asymptotique du treillis homogénéisé.

C'est la raideur en extension des barres $B_{i-1} B_i$ qui fait la raideur en flexion de la poutre qui apparaît à la limite asymptotique. Les barres « diagonales » ont pour fonction de solidariser (coudre) les deux chaînes de barres « horizontales », mais leur raideur ne joue aucun rôle.

6) En fait, on peut accéder plus vite au résultat obtenu à la question précédente par une méthode énergétique. Considérons une déformée quelconque du treillis. Comme les barres « horizontales » et « verticales » sont rigides, la donnée de leurs angles de rotation suffit à décrire complètement une déformée quelconque du treillis. Notons $\theta_i = \theta(x_i)$ les angles de rotation des barres $A_i B_i$ et $(u_i - u_{i-1})/l = [u_y(x_i) - u_y(x_{i-1})]/l$ ceux des barres horizontales. L'énergie élastique d'une maille ainsi déformée vaut :

$$\frac{k_h l}{2} (\theta_i - \theta_{i-1})^2 + \frac{\sqrt{2} k_d l}{4} \left(\theta_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{l} \right)^2,$$

de sorte que les valeurs des u_i, θ_i à l'équilibre sont celles qui minimisent l'énergie potentielle totale :

$$E_n(u_i, \theta_i) = -F u_n + \sum_{i=1}^n \frac{k_h l}{2} (\theta_i - \theta_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{2} k_d l}{4} \left(\theta_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{l} \right)^2.$$

Cherchons à voir comment évolue la solution de ce problème de minimisation lorsque $l \rightarrow 0+$. Les comportements asymptotiques des deux sommes sont :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{k_h l}{2} (\theta_i - \theta_{i-1})^2 &\sim \frac{k_h l^2}{2} \int_0^L \theta'(x) dx, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{2} k_d l}{4} \left(\theta_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{l} \right)^2 &\sim \frac{\sqrt{2} k_d}{4} \int_0^L (\theta(x) - u'(x))^2 dx, \end{aligned}$$

de sorte que l'énergie potentielle totale admet une limite (simple) qui est :

$$-F u(L) + \frac{\sqrt{2} k_d}{4} \int_0^L (\theta(x) - u'(x))^2 dx.$$

Mais, le problème de minimisation correspondant n'a pas de solution : on peut trouver des fonctions u et θ telles que $u' \equiv \theta$, $u(0) = 0$ et $u(L)$ est aussi grand que l'on veut. Cela vient du

fait que plus le treillis est élané, plus la force qu'on lui applique doit être faible. Il faut donc « rescaler » la force avec l : $F = \bar{F}l^\alpha$. Si $\alpha < 2$ le problème de minimisation n'a pas de limite et si $\alpha > 2$, il a comme solution, $(u, \theta) = (0, 0)$. Il faut donc choisir $\alpha = 2$ et on est donc amené à étudier le comportement du problème de minimisation de :

$$E_l(u, \theta) = -\bar{F}l^2 u(L) + \frac{k_h l^2}{2} \int_0^L \theta'(x) dx + \frac{\sqrt{2}k_d}{4} \int_0^L (\theta(x) - u'(x))^2 dx,$$

sur l'ensemble des fonctions régulières telles que $u(0) = 0$ et $\theta = 0$. Ce problème est aussi celui de la minimisation de :

$$-\bar{F}u(L) + \frac{k_h}{2} \int_0^L (\theta'(x))^2 dx + \frac{\sqrt{2}k_d}{4l^2} \int_0^L (\theta(x) - u'(x))^2 dx.$$

On voit que plus l est petit, plus le dernier terme est grand, sauf pour les couples (u, θ) tels que $u' \equiv \theta$. Au final, le problème de minimisation limite est celui de la minimisation de :

$$-\bar{F}u(L) + \frac{k_h}{2} \int_0^L \theta'(x) dx,$$

sur l'ensemble des couples $(u(x), \theta(x))$ tels que $u(0) = 0$, $\theta = 0$ et $u' \equiv \theta$. Mais, ce problème de minimisation est celui qui gouverne l'équilibre d'une poutre console d'Euler-Bernoulli et on retrouve l'ensemble des résultats obtenus à la question précédente.

Remarque. On peut également mener l'ensemble des calculs lorsque toutes les barres du treillis ont même raideur k . On trouve alors que la limite asymptotique est encore une poutre d'Euler-Bernoulli. Sa raideur en flexion vaut alors $kl^2/2$.