

Milieus micromorphes et de Cosserat : Théorie générale et application à la plasticité

Ecole des Mines de Paris, Centre des Matériaux, CNRS UMR7633
samuel.forest@ensmp.fr

Résumé

L'enrichissement de la cinématique de la particule matérielle par l'attribution d'un trièdre directeur déformable conduit à l'élaboration d'une nouvelle classe de milieux continus, baptisés micromorphes par Eringen au début des années 1960. La cinématique et les équations de bilan régissant les milieux micromorphes seront établies dans le contexte des transformations finies. Des tenseurs de contraintes généralisées sont introduits sur la base du principe des puissances virtuelles. L'introduction de liaisons internes permet d'obtenir des cas particuliers importants, tels que le milieu de Cosserat, lorsque le trièdre directeur est rigide, et le milieu du second gradient atteint lorsque le trièdre directeur est astreint à suivre la matière. La formulation de lois de comportement élasto-viscoplastique s'appuie sur la thermodynamique des milieux continus. Elle requiert une discussion sur le choix des mesures de déformations, leur décomposition en parties élastique et plastique, et le développement de lois d'écoulement viscoplastique et de lois d'évolutions pour les variables internes. Les critères de plasticité intègrent les contributions des différents tenseurs des contraintes de la théorie. Des problèmes aux limites élémentaires seront résolus pour des milieux micromorphes élastiques ou élastoplastiques afin d'illustrer l'importance des conditions aux limites supplémentaires qui surgissent dans le cadre de cette théorie. Le cas de la formation et de la propagation de bandes de localisation de la déformation plastique sera traité en particulier, avec les applications que l'on connaît lors de la déformation des aciers. L'approche micromorphe s'étend à des degrés de liberté supplémentaires non directement de nature cinématique, tels que des variables d'écrouissage en plasticité ou des paramètres d'ordre dans la méthode des champs de phases. En particulier, la plasticité à gradient, largement invoquée dans les dix dernières années pour décrire certains effets d'échelle observés dans la plasticité des métaux, s'avère être un cas particulier du modèle micromorphe, au prix de liaisons internes adaptées. On établira la nature isotrope ou cinématique des écrouissages supplémentaires induits par les variables micromorphes. On illustrera les effets de taille attendus dans le cas de microstructures lamellaires ou granulaires, notamment dans le contexte de la plasticité cristalline. Ces exemples nécessiteront le développement de techniques d'homogénéisation des milieux micromorphes.

1 Cours 1

- Introduction : milieux continus généralisés
- Milieux micromorphes
- Milieux de Cosserat et une hiérarchie de milieux continus généralisés
- Linéarisation

2 Cours 2

- **Exercice** : Problèmes aux limites linéarisés pour un milieu de Cosserat

3 Cours 3

- Elastoplasticité des milieux micromorphes et de Cosserat
- Elastoplasticité des milieux du second gradient
- **Exercice** : Modèle de von Mises pour un milieu de Cosserat

4 Cours 4

- Approche micromorphe
- Plasticité à gradient selon Aifantis
- Lien avec la théorie des champs de phase et de Cahn–Hilliard

5 Séance de travaux dirigés

- Le laminé en plasticité à gradient
- Localisation de la déformation et régularisation
- Propagation d’une bande de Lüders

6 Cours 5

- Le tenseur densité de dislocation
- Plasticité cristalline à gradient

7 Cours 6

- **Exercice** : Le laminé avec une phase monocristalline
- Plasticité cristalline micromorphe
- Application aux polycristaux métalliques

8 Bibliographie

Voici une liste indicative de références consacrées à la mécanique des milieux continus généralisés. Les deux ouvrages de Eringen (1999) donnent l’exposé le plus complet sur les fondements. Il faut ajouter les articles de Mindlin, puis de Germain. Les travaux plus récents sont consacrés à la plasticité et à l’endommagement des milieux continus généralisés.

- [1] E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 106 :326–330, 1984.
- [2] E.C. Aifantis. The physics of plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 3 :211–248, 1987.
- [3] E.C. Aifantis. Gradient deformation models at nano, micro and macro scales. *J. of Engineering Materials and Technology*, 121 :189–202, 1999.
- [4] J.J. Alibert, P. Seppecher, and Dell’Isola. Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 8 :51–73, 2003.

- [5] H. Altenbach and V. Eremeyev. *Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures No. 541, Springer, 2012.
- [6] H. Altenbach, G. A. Maugin, and V. Erofeev. *Mechanics of Generalized Continua*. Advanced Structured Materials vol. 7, Springer, 2011.
- [7] M.F. Ashby. The deformation of plastically non-homogeneous alloys. In A. Kelly and R.B. Nicholson, editors, *Strengthening Methods in Crystals*, pages 137–192. Applied Science Publishers, London, 1971.
- [8] O. Aslan, N. M. Cordero, A. Gaubert, and S. Forest. Micromorphic approach to single crystal plasticity and damage. *International Journal of Engineering Science*, 49 :1311–1325, 2011.
- [9] D. Besdo. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mechanica*, 20 :105–131, 1974.
- [10] J. Besson. *Local approach to fracture*. Ecole des Mines de Paris–Les Presses, 2004.
- [11] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux*. ISBN 2-7462-0268-9, EAN13 9782746202689, 445 p., Hermès, France, 2001.
- [12] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, and M. Blétry. *Non-Linear Mechanics of Materials*. Series : Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 167, Springer, ISBN : 978-90-481-3355-0, 433 p., 2009.
- [13] R. de Borst. Simulation of strain localization : a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8 :317–332, 1991.
- [14] R. de Borst. A generalization of J_2 -flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103 :347–362, 1993.
- [15] W. Cao, X. Yang, and X. Tian. Basic theorems in linear micromorphic thermoelectronelasticity and their primary application. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 26 :162–176, 2013.
- [16] P. Cermelli and M.E. Gurtin. On the characterization of geometrically necessary dislocations in finite plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :1539–1568, 2001.
- [17] N. M. Cordero, S. Forest, and E. P. Busso. Generalised continuum modelling of grain size effects in polycrystals. *Comptes Rendus Mécanique*, 340 :261–274, 2012.
- [18] N.M. Cordero, A. Gaubert, S. Forest, E. Busso, F. Gallerneau, and S. Kruch. Size effects in generalised continuum crystal plasticity for two-phase laminates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58 :1963–1994, 2010.
- [19] R. de Borst and J. Pamin. Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :2477–2505, 1996.
- [20] F. Dell’Isola and P. Seppecher. The relationship between edge contact forces, double forces and interstitial working allowed by the principle of virtual power. *C.R. Acad. Sci. Paris IIb*, 321 :303–308, 1995.
- [21] F. Dell’Isola and P. Seppecher. Edge contact forces and quasi-balanced power. *Meccanica*, 32 :33–52, 1997.
- [22] T. Dillard, S. Forest, and P. Ienny. Micromorphic continuum modelling of the deformation and fracture behaviour of nickel foams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 25 :526–549, 2006.
- [23] R.A.B. Engelen, N.A. Fleck, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers. An evaluation of higher-order plasticity theories for predicting size effects and localisation. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :1857–1877, 2006.

- [24] R.A.B. Engelen, M.G.D. Geers, and F.P.T. Baaijens. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity*, 19 :403–433, 2003.
- [25] A.C. Eringen. *Polar and non local fields theories*, in *Continuum Physics*, volume IV. Academic Press, 1976.
- [26] A.C. Eringen. *Microcontinuum field theories*. Springer, New York, 1999.
- [27] A.C. Eringen. *Nonlocal continuum field theories*. Springer, New York, 2002.
- [28] A.C. Eringen and E.S. Suhubi. Nonlinear theory of simple microelastic solids. *Int. J. Engng Sci.*, 2 :189–203, 389–404, 1964.
- [29] N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. A phenomenological theory for strain gradients effects in plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :1825–1857, 1993.
- [30] N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity. *Adv. Appl. Mech.*, 33 :295–361, 1997.
- [31] S. Forest. Generalized continua. In K.H.J. Buschow, R.W. Cahn, M.C. Flemings, B. Ilshner, E.J. Kramer, and S. Mahajan, editors, *Encyclopedia of Materials : Science and Technology updates*, pages 1–7. Elsevier, Oxford, 2005.
- [32] S. Forest. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Les Presses de l’Ecole des Mines de Paris, ISBN : 2-911762-67-3, 200 pages, 2006.
- [33] S. Forest. Some links between cosserat, strain gradient crystal plasticity and the statistical theory of dislocations. *Philosophical Magazine*, 88 :3549–3563, 2008.
- [34] S. Forest. The micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity and damage. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 135 :117–131, 2009.
- [35] S. Forest and E. C. Aifantis. Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermomechanics of generalized continua. *International Journal of Solids and Structures*, 47 :3367–3376, 2010.
- [36] S. Forest and M. Amestoy. Hypertemperature in thermoelastic solids. *Comptes Rendus Mécanique*, 336 :347–353, 2008.
- [37] S. Forest, K. Ammar, and B. Appolaire. Micromorphic vs. phase-field approaches for gradient viscoplasticity and phase transformations. In B. Markert, editor, *Advances in Extended and Multifield Theories for Continua*, pages 69–88. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 59, Springer, 2011.
- [38] S. Forest, P. Boubidi, and R. Sievert. Strain localization patterns at a crack tip in generalized single crystal plasticity. *Scripta Materialia*, 44 :953–958, 2001.
- [39] S. Forest, G. Cailletaud, and R. Sievert. A Cosserat theory for elastoviscoplastic single crystals at finite deformation. *Archives of Mechanics*, 49(4) :705–736, 1997.
- [40] S. Forest, N.M. Cordero, and E.P. Busso. First vs. second gradient of strain theory for capillarity effects in an elastic fluid at small length scales. *Computational Materials Science*, 50 :1299–1304, 2011.
- [41] S. Forest and K. Sab. Continuum stress gradient theory. *Mechanics Research Communications*, 40 :16–25, 2012.
- [42] S. Forest and R. Sievert. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, 160 :71–111, 2003.
- [43] S. Forest and R. Sievert. Nonlinear microstrain theories. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :7224–7245, 2006.
- [44] E. Fried and M.E. Gurtin. Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter. *Physica D*, 68 :326–343, 1993.

- [45] P. Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient. *J. de Mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- [46] P. Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. part 2 : Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, 25 :556–575, 1973.
- [47] A.E. Green and R.S. Rivlin. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. and Anal.*, 17 :113–147, 1964.
- [48] W. Günther. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abhandlungen der Braunschweig. Wiss. Ges.*, 10 :195–213, 1958.
- [49] M.E. Gurtin. Generalized Ginzburg–Landau and Cahn–Hilliard equations based on a microforce balance. *Physica D*, 92 :178–192, 1996.
- [50] M.E. Gurtin. A gradient theory of single–crystal viscoplasticity that accounts for geometrically necessary dislocations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :5–32, 2002.
- [51] M.E. Gurtin and L. Anand. Thermodynamics applied to gradient theories involving the accumulated plastic strain : The theories of Aifantis and Fleck & Hutchinson and their generalization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 :405–421, 2009.
- [52] B. Halphen and Q.S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14 :39–63, 1975.
- [53] C.B. Kafadar and A.C. Eringen. Micropolar media : I the classical theory. *Int. J. Engng Sci.*, 9 :271–305, 1971.
- [54] W.T. Koiter. Couple-stresses in the theory of elasticity. i and ii. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, B67 :17–44, 1963.
- [55] E. Kröner. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics. *Int. J. Engng. Sci.*, 1 :261–278, 1963.
- [56] E. Kröner. Dislocations in crystals and in continua : A confrontation. *International Journal of Engineering Science*, 33 :2127–2135, 1995.
- [57] Kröner, E. *Mechanics of generalized continua, Proc. of the IUTAM-Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications, Freudenstadt, Stuttgart*. Springer Verlag, 1967.
- [58] H. Lippmann. Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens. *Acta Mechanica*, 8 :255–284, 1969.
- [59] H. Lippmann. Cosserat plasticity and plastic spin. *Appl. Mech. Rev.*, 48 :753–762, 1995.
- [60] J. Mandel. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solids Structures*, 9 :725–740, 1973.
- [61] G. A. Maugin. Nonlocal theories or gradient–type theories : a matter of convenience? *Archives of Mechanics*, 31 :15–26, 1979.
- [62] G. A. Maugin. The method of virtual power in continuum mechanics : Application to coupled fields. *Acta Mechanica*, 35 :1–70, 1980.
- [63] G. A. Maugin. Internal variables and dissipative structures. *J. Non–Equilib. Thermodyn.*, 15 :173–192, 1990.
- [64] G. A. Maugin and A. V. Metrikine. *Mechanics of generalized continua, One hundred years after the Cosserats*. Advances in Mechanics and Mathematics vol. 21, Springer, 2010.
- [65] G. A. Maugin and W. Muschik. Thermodynamics with internal variables, Part I. general concepts. *J. Non–Equilib. Thermodyn.*, 19 :217–249, 1994.

- [66] G.A. Maugin, R. Drouot, and F. Sidoroff. *Continuum Thermomechanics, The Art and Science of Modelling Material Behaviour, Paul Germain's Anniversary Volume*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [67] R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 :51–78, 1964.
- [68] H.B. Mühlhaus. *Continuum models for materials with microstructure*. Wiley, 1995.
- [69] H.B. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 37 :271–283, 1987.
- [70] W. Nowacki. *Theory of asymmetric elasticity*. Pergamon, 1986.
- [71] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and J.H.P. de Vree. Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 39 :3391–3403, 1996.
- [72] K. Saanouni and M. Hamed. Micromorphic approach for finite gradient-elastoplasticity fully coupled with ductile damage : Formulation and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 50 :2289–2309, 2013.
- [73] C. Sansour. A theory of the elastic-viscoplastic cosserat continuum. *Archives of Mechanics*, 50 :577–597, 1998.
- [74] C. Sansour. A unified concept of elastic-viscoplastic Cosserat and micromorphic continua. *Journal de Physique IV*, 8 :Pr8–341–348, 1998.
- [75] C. Sansour, S. Skatulla, and H. Zbib. A formulation for the micromorphic continuum at finite inelastic strains. *Int. J. Solids Structures*, 47 :1546–1554, 2010.
- [76] A. Sawczuk. On yielding of Cosserat continua. *Archives of Mechanics*, 19 :3–19, 1967.
- [77] H. Schäfer. Das Cosserat-Kontinuum. *ZAMM*, 47 :485–498, 1967.
- [78] P. Steinmann. Views on multiplicative elastoplasticity and the continuum theory of dislocations. *International Journal of Engineering Science*, 34 :1717–1735, 1996.
- [79] C. Teodosiu. *Elastic models of crystal defects*. Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [80] C. Teodosiu. *Large plastic deformation of crystalline aggregates*. CISM Courses and Lectures No. 376, Udine, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [81] R.A. Toupin. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11 :385–414, 1962.
- [82] R.A. Toupin. Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17 :85–112, 1964.
- [83] R.L.J.M. Ubachs, P.J.G. Schreurs, and M.G.D. Geers. A nonlocal diffuse interface model for microstructure evolution of tin-lead solder. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :1763–1792, 2004.
- [84] R.L.J.M. Ubachs, P.J.G. Schreurs, and M.G.D. Geers. Microstructure dependent viscoplastic damage modelling of tinlead solder. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :2621–2651, 2006.
- [85] R.L.J.M. Ubachs, P.J.G. Schreurs, and M.G.D. Geers. Elasto-viscoplastic nonlocal damage modelling of thermal fatigue in anisotropic lead-free solder. *Mechanics of Materials*, 39 :685–701, 2007.
- [86] H.T. Zhu, H.M. Zbib, and E.C. Aifantis. Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites. *Acta Mechanica*, 121 :165–176, 1997.